Mette Hjelmborg

KOLORIT TIL HJERNEN

Usædvanlige opgaver
Lærervejledning

Gyldendal

Kolorit til hjernen – Usædvanlige opgaver, lærervejledning
af Mette Hjelmborg

Forlagsredaktion: Stine Kock, Tine Friis Scheby
Grafisk tilrettelæggelse: Anne Marie Kaad
Tegninger: Anne Marie Kaad, Eva Wulff

Kolorit til hjernen – serien består af supplerende
materialer til matematik. Denne bog henvender
sig primært til 4.- 7. klasse.

www.gyldendal-uddannelse.dk

Indhold

Lærervejledning – netversion

[1 og 2] Tabelcirkler 1 og 2

I stedet for at tegne tabellerne kan man sy dem på kraftigt pap.

Bemærk, at eleverne ikke nødvendigvis regner alle multiplikationsstykkerne. Multiplikation svarer til gentagen addition, så mange elever tænker fx, at det næste facit er 3 større end det foregående, hvis de arbejder med 3-tabellen. Måske kan eleverne se en sammenhæng mellem tabellen og antal strukturer i tegningen. 3-tabellen har 2 strukturer, 4-tabellen har 3 strukturer.

[3] Tabelmønstre

Eleverne opdager hurtigt forskellen mellem lige og ulige tal, hvis de prøver at lave tabellerne 2, 4, 6 og 8. De elever, der repræsenterer de ulige tal, bliver "arbejdsløse".

De "gode venner" (to tal, der giver sum 10) er også centrale i øvelsen, da 3-tabellens mønster svarer til 7-tabellens mønster. At øge med syv, "gå syv frem", svarer til at reducere med tre, "gå tre tilbage", i dette system.

Se evt. også *Kolorit for fjerde, grundbog* side 103-109 om gangetabeller.

[4] Farv tabeller

Det er primtallene, der ikke farves. Metoden kaldes Erastosthenes si. Tal, der er farvelagt med en eller flere farver, er sammensatte tal. Jo flere farver, jo flere divisorer.

Se evt. også *Kolorit for fjerde, grundbog* side 47, *Kolorit for femte, grundbog* side 76 og 79 og *Kolorit for sjette, grundbog* side 11 om divisorer og primtal

[5] Primtalsnaboer

Det er korrekt, at primtal større end 3 altid er naboer til tal fra 6-tabellen. Tal større end 3, der ikke er nabo til 6-tabellen, er ikke primtal. Enten er de med i 2- eller 3-tabellen. Hvis eleverne farver tabelmønstrene for 2- og 3-tabellen i 100-tavlen, kan dette ses visuelt. De farvede tal (større end 3) kan ikke være primtal, der er kun plads til primtal på nabopladserne.

Et algebraisk argument: Tallene kan opdeles i 6 klasser: 6n, 6n+1, 6n+2, 6n+3, 6n+4, 6n+5.

6n er tal i 6-tabellen, 6n+1 er naboer til 6-tabellen, 6n+2 er delelig med 2, da 6n+2 = 2(3n+1) og er derfor ikke et primtal større end 3, 6n+3 er delelig med 3, da 6n+3 = 3(2n+1) og er derfor ikke et primtal større end 3, 6n+4 er delelig med 2, da 6n+4 = 2(3n+2) og er derfor ikke et primtal større end 3, 6n+5 er naboer til 6-tabellen. Der kan altså kun findes primtal på nabopladserne.

Se evt. også *Kolorit for femte, grundbog* side 79 og *Kolorit for sjette, grundbog* side 11 om primtal.

[6] Rummet med de 100 døre

Der er mange måder at udforske situationen på. Nogle arbejder måske kun med dørene fra 1-20 og forsøger at generalisere, at finde et mønster.

Andre har måske en hypotese om, hvilke døre der er åbne/lukkede og udforsker kun en enkelt dør ad gangen for at be- eller afkræfte deres hypotese.

Mange har behov for at være meget konkrete, de bruger brikker eller skriver åben/lukket.

De døre, der er åbne til sidst, er nummereret med kvadrattallene 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

De er kendetegnet ved at have et ulige antal divisorer.

24 har divisorerne 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, altså et lige antal divisorer. Bemærk, at alle divisorer har en "makker"- 1 er makker med 24 ($1 \cdot 24=24$), 2 er makker med 12 osv.

25 som er et kvadrattal har divisorerne 1, 5, 25, altså et ulige antal divisorer. Den midterste divisor har ingen "makker", den er "makker" med sig selv.

Det er i øvrigt ligegyldigt, om tallene 1-100 siges i rækkefølge, bare man siger hvert tal præcis én gang.

Se evt. også *Kolorit for fjerde, grundbog* side 127-129, hvor kvadrattallene opdages, som summen af de fortløbende ulige tal og *Kolorit for sjette, grundbog* side 9 om talfølger, samt *Kolorit for fjerde, grundbog* side 47, *Kolorit for femte, grundbog* side 76 og 79 og *Kolorit for sjette, grundbog* side 11 om divisorer.

[7] Historisk gangemetode 1

Multiplikation bygger på addition. Der foretages fortløbende fordoblinger, og de relevante delresultater adderes. For $12 \cdot 15$ benyttes at 12=4+8, så tallene ud for 4 og 8 adderes for at finde resultatet. Metoden er generel, da samtlige tal kan skrives som en to-potens eller en sum af to-potenser. $1=2^0$, $2=2^1$, $3=1+2=2^0+2^1$, $4=2^2$, $5=1+4=2^0+2^2$, $6=2+4$, $7=1+2+4$, 8, $9=1+8$ osv.

Algebraisk ser det således ud (eksemplet $13 \cdot 7$):

$13 \cdot 17=(1+4+8) \cdot 17=1 \cdot 17+4 \cdot 17+8 \cdot 17=17+68+136=221$

[8] Historisk gangemetode 2

Metoden bygger på gentagne halveringer og fordoblinger. For ulige tal benyttes heltalsværdien af halveringen (man runder ned), og man får et mellemresultat, der skrives i højre kolonne. Resultatet findes ved at addere tallene i højre kolonne.

Metoden er generel, da samtlige tal kan halveres gentagne gange, indtil man når til 1 ud fra ovenstående metode.

Eksempelvis er

$12=6\cdot 2=3\cdot 2\cdot 2=(1+2)\cdot 2\cdot 2=1\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2=1\cdot 2\cdot 2+1\cdot 2\cdot 2\cdot 2$

Algebraisk ser det således ud (eksemplet $13\cdot 17$):

$13\cdot 17=(12+1)\cdot 17=(6\cdot 2)\cdot 17+1\cdot 17=6\cdot(2\cdot 17)+1\cdot 17$
$=(3\cdot 2)\cdot 34+1\cdot 17=3(2\cdot 34)+1\cdot 17=(2+1)\cdot(68)+1\cdot 17=2\cdot 68+1\cdot 68+1\cdot 17$
$=1\cdot(2\cdot 68)+1\cdot 68+1\cdot 17=1\cdot 136+1\cdot 68+1\cdot 17=221$

[9, 10 og 11] Divisionsregler 1, 2 og 3

Divisionsregler 1, 7-reglen

Et vilkårligt tal kan skrives på formen 10a+b. Her betegner b enerne og a "resten" af tallet, når enerne fjernes. Reglen går ud på at tjekke, om 7 går op i a–2b.

Antag, at 7 går op i a–2b, så går 7 også op i 10(a–2b) =10a–20b=10a+b–21b. 7 går op i 21b, så 7 må også gå op i 10a+b som ønsket.

Divisionsregler 2, 11-reglen

Nedenstående kan generaliseres, men behandles kun for 6-cifrede tal.

Et vilkårligt 6-cifret tal kan skrives på formen
$a_6\cdot 10^6+a_5\cdot 10^5+a_4\cdot 10^4+a_3\cdot 10^3+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0$ (Positionssystemets opbygning)

Hvis man dividerer ulige tier-potenser (10, 1000, 100000, ...) med 11, får man "rest -1"

Hvis man dividerer lige tier-potenser (1, 100, 10000, ...) med 11, får man "rest 1"

$x=a_0+a_2+a_4+\ldots$, (koefficienterne for de lige tier-potenser) og
$y=a_1+a_3+a_5+\ldots$ (koefficienterne for de ulige tier-potenser)
11 går altså op i tallet, hvis 11 går op i x–y.

Divisionsregler 3, 3-reglen

Et vilkårligt tal kan skrives på formen:

$a_n\cdot 10^n+\ldots+a_3\cdot 10^3+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0$ (Positionssystemets opbygning)

Dette kan omskrives til:

$a_n\cdot 99\ldots 9+\ldots+a_3\cdot 999+a_2\cdot 99+a_1\cdot 9+(a_n+\ldots+a_3+a_2+a_1+a_0)$

Tallet i parentes er tallets tværsum.

Eftersom 3 går op i tallene 99...9, ... ,999, 99, 9, er det nok at undersøge, om 3 går op i tværsummen.

Eftersom 9 også går op i 99...9, ... ,999, 99, 9, er det også nok at undersøge, om 9 går op i tværsummen.

[12] Taltrick 1

Hvis man dividerer slutresultatet med 100 (fjerner 2 nuller) og trækker 1 fra, får man tallet, man startede med. Alternativt: træk 100 fra resultatet og divider med 100.

Algebraisk ser tricket således ud:

$5 \cdot (4 \cdot (5n+6)-4)=100n+100=100 \cdot (n+1)$

[13] Taltrick 2

Slutresultatet bliver et firecifret tal, hvor de to første cifre er personens skostørrelse, og de sidste to cifre er personens alder.

Algebraisk ser tricket således ud, når s betegner skostørrelsen (helt tal), f betegner fødselsåret, $å$ betegner årstallet:

$50(s+5)+1750-f+å-2001(+1)=100s+å-f-1(+1)$

[14] Sidste brik

Nøgletal for at vinde er 17, 14, 11, 8, 5, 2.

Hvis spiller 1 sørger for at “aflevere” disse antal af brikker til modspilleren, er spiller 1 sikker på at vinde. Spiller 1 starter altså med at tage 2 brikker.

Se evt. også *Kolorit for femte, grundbog* side 59 spillet “Ram 20”.

[15] Først til 100

Nøgletal for at vinde er 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1.

Hvis spiller 1 sørger for at “aflevere” disse antal af brikker til modspilleren, er spiller 1 sikker på at vinde. Spiller 1 starter altså med at tage 1 brik.

Se evt. også *Kolorit for fjerde, grundbog* side 19 spillet “1000”.

[16] Den skjulte sum

Summen er altid 2000.

Konstruktion:

Vælg n tal, i dette tilfælde 6 tal, der giver en sum på ca. halvdelen af det ønskede tal.

Tallene placeres i første vandrette række (Sum 1030).

Vælg n–1 tal, i dette tilfælde 5 tal, der giver den resterende sum (Sum 970, 970+1030=2000).

Skriv de 5 tal ud for hver af de 5 nederste vandrette rækker (se søjlen yderst til højre). Det tal, der står ud for den pågældende vandrette række, lægges til hvert tal i den første vandrette række og resultaterne giver tallene i den nye vandrette række.

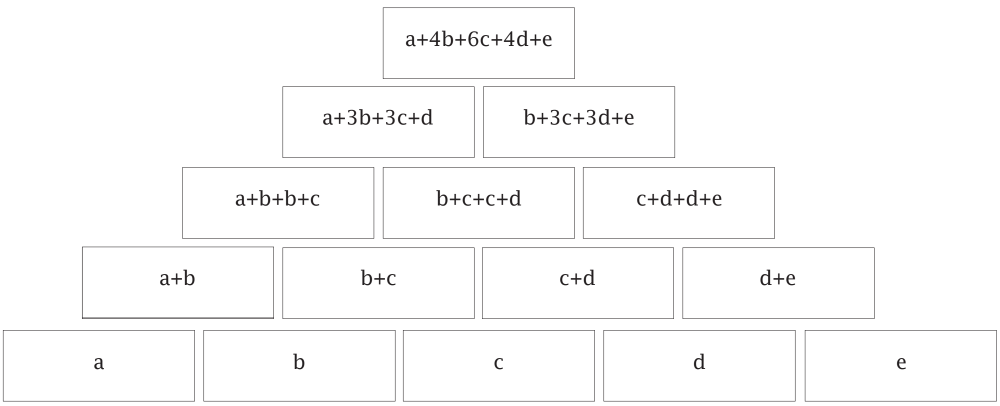
						Sum	Adderes til første række
124	**71**	**53**	**469**	**17**	**296**	1030	0
327	**274**	**256**	**672**	**220**	**499**	2248	203
366	**313**	**295**	**711**	**259**	**538**	2482	242
139	**86**	**68**	**484**	**32**	**311**	1120	15
441	**388**	**370**	**786**	**334**	**613**	2932	317
317	**264**	**246**	**662**	**210**	**489**	2188	193
1714	1396	1288	3784	1072	2746	12000	970

De søgte tal i 3x3-tabellen er (fra oven) 60, 190, 50.

Summen kan ændres til fx 301, ved at øge alle tallene med 1 i en række eller i en kolonne.

[17] Taltrapper

Hvis man kalder de nederste tal for hhv. a, b, c, d og e, fås summen a+4b+6c+4d+e på øverste trin.



Denne sum maksimeres ud fra tallene 1, 2, 3, 5, 5. Her er c=5, b=5, d=3, a=2, b=1. Resultatet bliver 65.

Hvis man kalder de nederste tal for hhv. a, b, c, d, e, f i trappen med 5 trin, er det a+5b+10c+10d+5e+f, der skal maksimeres.

Man benytter sig af **Pascals trekant**:

```
                  1
                1   1
              1   2   1
            1   3   3   1
          1   4   6   4   1
        1   5   10  10  5   1
      1   6   15  20  15  6   1
    1   7   21  35  35  21  7   1
```

[18 og 19] **Ugedage 1 og 2**

Tabelmetoden:

Normalt vil en bestemt dato falde på den næste ugedag næste år, med mindre det er skudår.

365 dage svarer til 52 hele uger og 1 ekstra dag.

Månedens tal kan forklares således: Lad 1. januar i et bestemt år være en søndag (1). Hvilken ugedag er så 1. februar samme år? Der er 31 dage i januar, hvilket svarer til 4 uger og 3 dage. 1. februar må så være en onsdag (1+3=4), hvilket stemmer med tabellen over månedens tal. Argumentet fortsættes (både for skudår og ikke-skudår).

Århundredets tal kan forklares ud fra en forståelse af skudår. Prøv at sætte 1. januar 1700 til en onsdag (4) og overvej, hvilken ugedag 1. januar 1800 falder på. Som udgangspunkt flytter systemet sig 1 dag pr. år. Men det er skudår hvert 4. år (årstal deleligt med 4), undtagen når årstallet er deleligt med 100. Dette ophæves dog, hvis årstallet er deleligt med 400.

Fra 1. januar 1700 til 1. januar 1800 må der altså være 24 skuddage (det er ikke skudår i 1700). Systemet må altså flytte sig 24 skuddage og 100 ekstra dage (1 pr. år), hvilket svarer til 17 hele uger og 5 ekstra dage. 1. januar må altså være en mandag (2).

(4+5=7 (hel uge) + 2 ekstra). Argumentet fortsættes.

Formelmetoden:

Denne del af formlen $2m+\left[\frac{3(m+1)}{5}\right]$ kan omsættes til samme system som månedens tal ovenfor.

Denne del af formlen $\left[\frac{y}{4}\right]-\left[\frac{y}{100}\right]+\left[\frac{y}{400}\right]$ fungerer som en skudårstæller.

[20] CPR-nummer-tjekker

Prøv evt. at finde kontrolcifferet for 111111-111x. Er det en kvinde eller en mand?

Evt. mere information om CPR-numre findes på www.cpr.dk

[21, 22 og 23] Magiske kvadrater 1, 2 og 3

3x3 kvadrat:

Summen af tallene fra 1 til 9 er 45. Der skal kun bruges tre tal i en række/kolonne/diagonal, så den søgte sum må være 45:3 = 15.

4x4 kvadrat:

Summen af tallene fra 1 til 16 er 136. Der skal kun bruges fire tal i en række/kolonne/diagonal, så den søgte sum må være 136:4 = 34.

5x5 kvadrat:

Summen af tallene fra 1 til 25 er 325. Der skal kun bruges fem tal i en række/kolonne/diagonal, så den søgte sum må være 325:5 = 65.

Man kan benytte **Gauss' sumformel** til at finde summen af tallene fra 1 til n

$$1+2+3+4+\ldots+\mathrm{n}=\frac{n(n+1)}{2}$$

Mulige løsninger (der er andre muligheder):

Det bliver sværere og sværere at udfylde kvadraterne. Lad eleverne holde regnskab med de tal, der mangler.

4	3	8
9	5	1
2	7	6

7	2	11	14
13	8	1	12
4	9	16	5
10	15	6	3

8	13	12	1
2	7	14	11
15	10	3	6
9	4	5	16

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Metoderne til at fremstille magiske kvadrater med ulige antal rækker/kolonner fungerer, da metoden sikrer gennemsnitlige summer i hhv. rækker og kolonner.

Her er der også en metode til konstruktioner af 4x4-kvadrater (sum 34).

Indsæt tallene fra 1-16.	Fjern tallene i de grå felter.	Indsæt resten af tallene i de grå felter ved at tælle nedefter fra 16, spring over allerede benyttede tal.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Her er der eksempler på større magiske kvadrater, som kan bruges til at lave kunst.

9	2	25	18	11
3	21	19	12	10
22	20	13	6	4
16	14	7	5	23
15	8	1	24	17

18	19	14	23	24	3
16	21	33	4	32	5
6	31	12	25	10	27
11	26	2	35	7	30
24	13	22	15	8	29
36	1	28	9	20	17

44	33	18	22	38	9	11
3	14	45	21	19	24	49
43	27	8	34	2	46	15
10	30	13	25	37	20	40
35	4	48	16	42	23	7
1	26	31	29	5	36	47
39	41	12	28	32	17	6

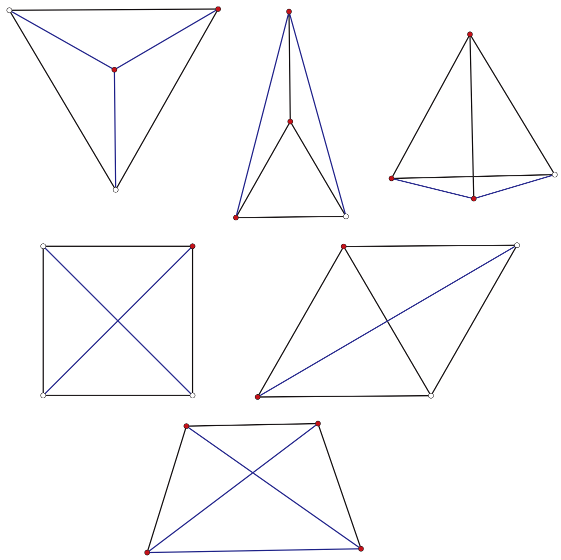
Der kan blandt andet ses eksempler på Paul Panhuysens kunst her:

http://www.kormplastics.nl/panhuysen.html.

Se evt. også *Kolorit for fjerde, grundbog* side 111-118, hvor der arbejdes med matematik og kunst og *Kolorit for fjerde, grundbog* side 128, samt *Kolorit for fjerde, grundbog* side 95, hvor **Gauss' sumformel** udforskes.

[24] Præcis to forskellige afstande

Der kan laves i alt 6 forskellige geometriske figurer med ovenstående egenskab. Den sidste er typisk den sværeste at finde frem til. Bemærk, at den er en del at den regulære pentagon.



[25] Lav et kvadrat

Øvelserne får en ekstra dimension, hvis der er en anden gruppe, der observerer og dernæst kommenterer problemløsningen. De kan blandt andet fokusere på gruppens samarbejde og strategier, herunder brug af figurens matematiske egenskaber. Kvadratet er eksempelvis kendetegnet ved at have 4 lige lange sider og 4 rette vinkler.

Det er ikke et krav at benytte hele rebet. Hvis man skal benytte hele rebet, er det ofte sværere.

Hvis man arbejder ude, fx på sportspladsen er det sværere at forholde sig til referencer, fx. en ret væg eller lignende.

[26 og 27] Beskriv med matematik 1 og 2

Her fokuseres på kommunikation af geometriske objekter med brug af matematisk sprogbrug. Til det første objekt bruges der fortrinsvis rette linjer og rette vinkler, til det andet objekt er der bløde strøg (halvcirkler, ellipser mm.).

Vær opmærksom på, at makkeren ikke ser de tegninger, som skal tegnes ud fra beskrivelsen.

Aftal regler for kommunikation på forhånd. Må man stille opklarende ja/nej spørgsmål?

Må man bede om pause/tegnetid?

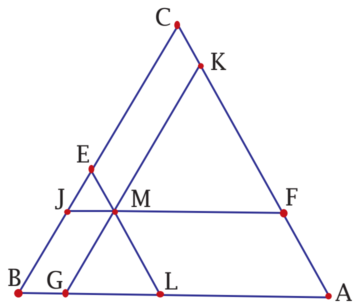
Må/skal man bruge lineal, vinkelmåler mm.?

Skal objektet tegnes i samme målestok, eller skal det bare ligne?

Se evt. *Kolorit for fjerde, grundbog* side 12, hvor koordinatsystemet tages i brug ved kommunikation af geometriske objekter eller *Kolorit for sjette, grundbog* side 117, hvor man arbejder med beskrivelser af mønstre.

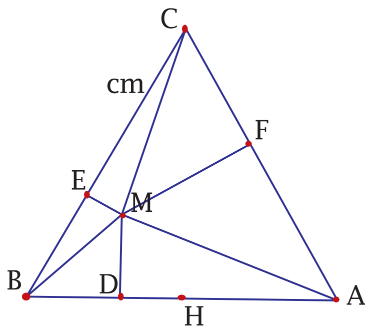
[28] Mariehønen

Summen af de tre længder svarer til trekantens sidelængde. Argumentet føres let ved at se på parallelogrammer og ligesidede trekanter nedenfor.



[29] Fluen

Summen af de tre længder svarer til trekantens højde.



Betragt trekanterne BCM, BAM og CAM, de tre fluelinjer er højder i disse trekanter.

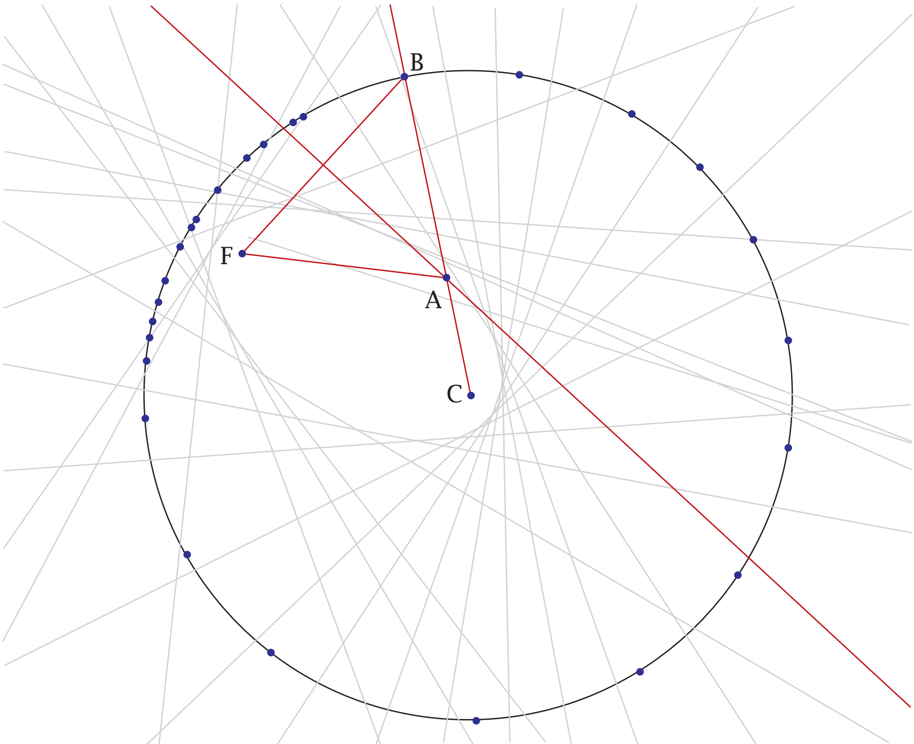
Trekantens areal kan fås ved:

$$a(T) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = \frac{1}{2} \cdot |EM| \cdot |BC| + \frac{1}{2} \cdot |FM| \cdot |AC| + \frac{1}{2} \cdot |DM| \cdot |BA| = \frac{1}{2} \cdot (|EM| + |FM| + |DM|) \cdot g$$

Heraf fås $|EM| + |FM| + |DM| = h$

[30] Ellipse 1

En ellipse er kendetegnet ved, at summen af afstandene fra et vilkårligt punkt på ellipsen til de to brændpunkter er konstant.



Betragt ovenstående skitse.

$$|FA| + |CA| = |BA| + |CA| = r$$

Ud fra kongruente trekanter opnås konstant sum af afstandene fra et vilkårligt punkt på ellipsen til de to brændpunkter. Summen svarer til radius af cirklen.

Jo tættere F er på centrum, jo mere ligner det en cirkel.

[31] Ellipse 2

Det er relativt let at se, at storaksens længde må svare til trådlængden, uanset hvor brændpunkterne placeres (før evt. snoren vandret ud, og benyt et symmetriargument).

I den første øvelse bliver storaksen 10 cm, og lilleaksen bliver 8 cm (3, 4, 5-trekanten er på spil).

[32] Klip med symmetri

Figurernes symmetriakser (som svarer til foldekanten) er centrale her.

Af retvinklede trekanter kan kun de ligebenede klippes.

Ikke alle trapezer kan klippes.

Parallelogrammet kan ikke klippes.

Ikke alle femkanter, sekskanter og syvkanter kan klippes, men de regulære kan.

Se evt. *Kolorit for Sjette, grundbog* side 23 og side 115-121, hvor symmetriakser behandles.

[33] Lav figurer

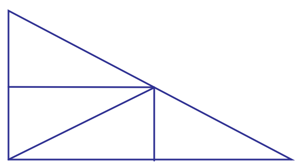
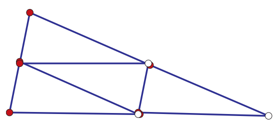
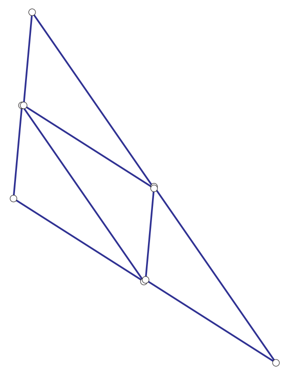
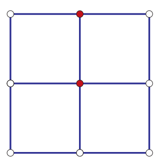
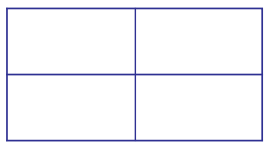
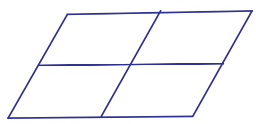
Det kan lade sig gøre for alle typer af trekanter, kvadratet, rektanglet, og parallelogrammet. Ikke alle trapezer og tilfældige firkanter kan pusles sammen.

Lad eleverne opdage, om det kan lade sig gøre eller ej.

Måske kan de ud fra figurens egenskaber, sidelængder og vinkler argumentere for, hvorfor det kan eller ikke kan lade sig gøre.

Gem brikkerne til de næste elever, eller find egnede brikker i matematiksamlingen, for at spare tid til konstruktion og klip.

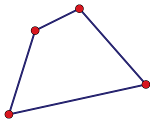
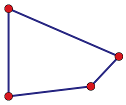
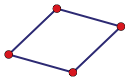
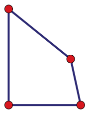
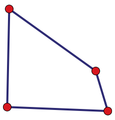
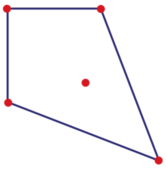
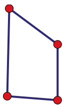
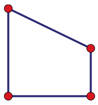
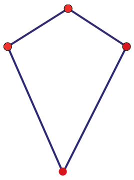
Eksempler:

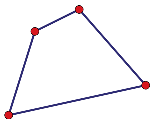
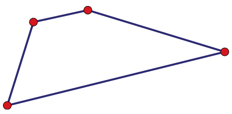
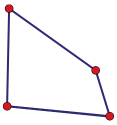
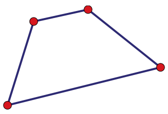
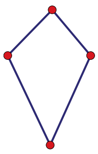
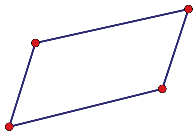
Retvinklet	Ligebenet	Vilkårlig trekant
		
Kvadrat	Rektangel	Parallelogram
		

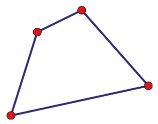
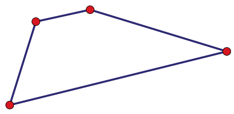
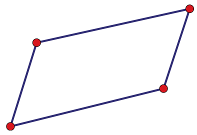
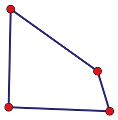
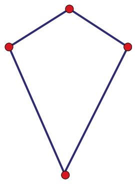
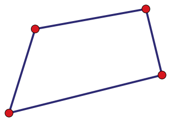
Se evt. også *Kolorit for fjerde, grundbog* side 98-99 om eksperimenter med tangrambrikker

[34, 35 og 36] Tegn firkanter 1, 2 og 3

Her er mulige eksempler

		Par af lige store sider		
		0	1	2
	0			
Antal rette vinkler	1			
	2			

		Par af parallelle sider		
		0	1	2
	0			Kan ikke lade sig gøre. 2 par af parallelle sider må nødvendigvis danne et parallelogram
Par af lige store sider	1			Kan ikke lade sig gøre. 2 par af parallelle sider må nødvendigvis danne et parallelogram
	2		Kan ikke lade sig gøre, hvis man kun tillader 1 par af parallelle sider eller 1 par af lige store sider.	

	Par af parallelle sider			
		0	1	2
Antal rette vinkler	0			
	1		Kan ikke lade sig gøre. 1 par af parallelle linjer giver anledning til to rette vinkler	Kan ikke lade sig gøre. 2 par af parallelle linjer giver anledning til mere end en ret vinkel
	2			Kan ikke lade sig gøre. 2 par af parallelle linjer giver anledning til mere end 2 rette vinkler

Se evt. også *Kolorit for fjerde, grundbog* side 54 om figurers egenskaber og *Kolorit for femte, grundbog* side 111 om trekanters egenskaber.

[37] "Fire på stribe" med 2 terninger

Alle felter på spillepladen er lige sandsynlige, men der er færre muligheder for at danne fire på stribe i yderfelterne, hvis man placerer et kryds i et hjørnefelt, er der kun 3 mulige rækker, der kan give 4 på stribe. For felter i midten er der langt flere rækker. Hvis man rammer et felt, hvor der allerede er sat et kryds efter 3 omkast, mister man sin tur.

[38 og 39] "Fire på stribe" med 2 gange 2 terninger eller 2 gange 3 terninger

Alle felter på spillepladen er *ikke* lige sandsynlige. Det er fx meget lettere at få øjensum 10 end øjensum 3, ved kast med tre terninger. Det er altså strategisk smart at placere brikkerne i midterfelterne. Omkast bør komme på tale ved meget store eller meget små øjensummer. Hvis man rammer et felt, hvor der allerede er sat et kryds efter 3 omkast, mister man sin tur.

Ved kast med to terninger er sandsynlighederne for øjensum:
p(2)=p(12)=1/36
p(3)=p(11)=2/36
p(4)=p(10)=3/36
p(5)=p(9)=4/36
p(6)=p(8)=5/36
p(7)=6/36

Det kan ses ved at betragte følgende skema over mulige øjensummer.

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
Sum	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Ved kast med tre terninger er sandsynlighederne for øjensum:
p(3)=p(18)=1/216
p(4)=p(17)=3/216
p(5)=p(16)=6/216
p(6)=p(15)=10/216
p(7)=p(14)=15/216
p(8)=p(13)=21/216
p(9)=p(12)=25/216
p(10)=p(11)=27/216

Se evt. også *Kolorit for fjerde, grundbog* side 11 om "fire på stribe i koordinatsystemet", *Kolorit for fjerde, grundbog* side 60 og *Kolorit for sjette, grundbog* side 130 og 142 om "øjensum ved kast med 2 terninger".

[40] Spillemaskinen

Der er hhv. 1, 4, 6, 4 og 1 veje (i alt 16 veje) ned til de respektive felter. **Pascals trekant** er en hjælp.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Gennemsnitligt vil ejeren tjene
(1 · 13 kr.+ 4 · 0 kr.+ 6 · 2,5 kr.+ 4 · 1 kr.+ 1 · 0 kr.):16 = 2 kr.

Det er altså OK at betale op til 2 kr. pr. spil set fra spillerens synsvinkel.

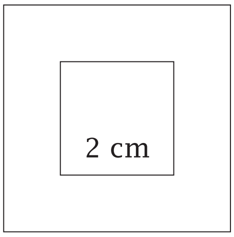
Se evt. *Kolorit for sjette, grundbog* side 83-85 og side 129-135 om sandsynlighed, kombinatorik og chancetræer

[41] Spin med mønt

Intuitivt vil de fleste synes, at det må være svært at ramme de tynde streger, men det er ikke tilfældet. For en 1-krone og en ternstørrelse på 4 cm · 4 cm er sandsynligheden for at vinde ca. 25 %.

Lad mønten repræsenteres af dens midtpunkt (en 1 krone er ca. 2 cm i diameter).

Forsøg at markere, hvor midtpunktet skal lande for at vinde. Ved at se på forhold mellem arealer kan sandsynligheden estimeres.



Kalder vi sidelængden i tern for *s* og møntens radius for *r*, fås følgende generelle model for sandsynligheden for at vinde:

$$p(vinde) = \frac{(s-2r)^2}{s^2}$$

For en 1-krone (r=1 cm) skal ternstørrelsen være mellem 6 cm og 7 cm, for at spillet er fair. En mere præcis beregning af ternstørrelsen kræver, at man løser ligningen

$$0{,}5 = \frac{(s-2r)^2}{s^2}$$

[42] Kortspil med match

Prøv at lade eleverne opstille de forskellige muligheder. Hvilke giver match? Hvilke giver ikke match?

For 3 kort af hver er der 6 mulige placeringer.

Es	Es	2	2	3	3
2	3	3	Es	2	Es
3	2	Es	3	Es	2

Fokuserer vi på den første mulighed, er der 4 rækkefølger (fra den anden bunke), der giver anledning til match.

Sandsynligheden for at få match må altså være 4/6 = 2/3.

Spillet kan let udvides. Hvis man har 4 kort af hver, er sandsynligheden for match 15/24 = 5/8, altså lidt mindre sandsynligt end for 3 kort, men med så få forsøg, ses dette sandsynligvis ikke.

[43] Et fair spil

Det første spil er fair. Uanset valg af tal har man lige stor sandsynlighed for at vinde.

Det andet spil er ikke fair, de midterste felter er mere sandsynlige end de yderste. Der er flere muligheder for at få øjensum 7 end øjensum 3.

Ved kast med to terninger er sandsynlighederne for øjensum:

$p(2)=p(12)=1/36$
$p(3)=p(11)=2/36$
$p(4)=p(10)=3/36$
$p(5)=p(9)=4/36$
$p(6)=p(8)=5/36$
$p(7)=6/36$

Det kan ses ved at betragte følgende skema over mulige øjensummer.

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
Sum	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

For at gøre spil 2 fair kan man evt. fokusere på lige eller ulige sum, eller flytte 1 felt fremad hvis summen er 7, men fx flytte 6 felter fremad hvis summen er 2 eller 12.

Eleverne kan eksperimentere sig frem til sandsynligheder for bestemte udfald i deres selvkonstruerede spil.

Se evt. også *Kolorit for fjerde, grundbog* side 58-60 og *Kolorit for sjette, grundbog* side 130 og 142.